1-أ- حل المعادلة (E)

المميزالمختصرللمعادلة (E) هو : $\Delta = (i\sin\theta)^2 - 4.(-\frac{1}{4})$

$$= -\sin^2\theta + 1$$
$$= \cos^2\theta$$

إذن حلاها هما :

$$\frac{-i\sin\theta + \cos\theta}{2} \quad \text{و} \quad \frac{-i\ \sin\theta - \cos\theta}{2}$$

يعني أن : $\frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}$ و $\frac{-\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}$

ولدينا z_1 هو الحل بحيث $\text{Re}(z_1) \succ 0$

و $\frac{\cos\theta}{2} \succ 0$ لأن $-\frac{\pi}{2} \prec \theta \prec 0$

إذن : $z_1 = \frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}$ و $z_2 = -\frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن :

$$S = \{z_1, z_2\}$$

ب- التحقق من أن : $z_2 = -\overline{z_1}$

لدينا : $-\overline{z_1} = -\left(\overline{\frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}}\right)$

$$= -\left(\frac{\cos\theta}{2} + i\frac{\sin\theta}{2}\right)$$
$$= -\frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}$$

ج- كتابة z_1 **و** z_2 **على الشكل المثلثي**

* لدينا : $z_1 = \frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$
$$= \left[\frac{1}{2}, -\theta\right]$$

* لدينا : $z_2 = -\overline{z_1}$

$$= -\overline{\left[\frac{1}{2}, -\theta\right]}$$
$$= -\left[\frac{1}{2}, -\theta\right]$$
$$= \left[\frac{1}{2}, \pi + \theta\right]$$

2-أ- لنبين أن : $(z_1 + z_2)^n = (-\sin\theta)^n i^n$

ليكن n عنصرا من IN

$$z_1+z_2=\frac{\cos\theta}{2}-i\frac{\sin\theta}{2}-\frac{\cos\theta}{2}-i\frac{\sin\theta}{2}$$
$$=-i\sin\theta$$

إذن : $(z_1+z_2)^n=(-i\sin\theta)^n$

أي أن $=(-\sin\theta)^n i^n$

ب- تحديد n من IN بحيث يكون $(z_1+z_2)^n$ حقيقيا

حسب ما سبق لدينا : $(z_1+z_2)^n=(-\sin\theta)^n i^n$

ونعلم أن العدد i^n يكون حقيقيا إذا وفقط إذا كان n عددا زوجيا

إذن يكون $(z_1+z_2)^n$ عددا حقيقيا إذا وفقط إذا كان n عددا زوجيا

3- أ- لنبين أن u جذر خامس للعدد v

لدينا :

$z_1=\left[\frac{1}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ و $z_2=\left[\frac{1}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$

ولدينا : $u^5=(2z_1)^5$

$$=\left[1,\frac{\pi}{6}\right]^5$$
$$=\left[1^5,\frac{5\pi}{6}\right]$$
$$=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]$$
$$=2z_2$$

إذن : $u^5=v$

وبالتالي فإن u هو جذر خامس للعدد v

ب- لنبين أن ABC متساوي الأضلاع

لدينا : $AB=|b-a|$

$$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|$$
$$=\left|-\sqrt{3}\right|$$
$$=\sqrt{3}$$

و $AC=|c-a|$

$$=\left|-i-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|$$
$$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right|$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}$$

$BC=|c-b|$

$$=\left|-i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i \right|$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

إذن : AB = AC= BC

وبالتالي فإن المثلث ABC متساوي الأضلاع.